

Монотонные бизнес-портфели и их оптимизация

Недосекин Алексей Олегович, д.э.н., к.т.н., вице-президент IFEL Rus

Введение

В [1] нами введено понятие монотонного фондового портфеля – такого, что доходности и риски активов в нем упорядочены одинаковым образом. Активы в таком портфеле являются недоминированными, т.е. одновременно обладают максимум доходности и минимумом риска.

Разумеется, все активы монотонного портфеля имеют шанс участвовать в формировании эффективной границы портфельного множества. Если некоторый актив обладает худшими характеристиками по доходности и риску, нежели активы из монотонного портфеля, то, разумеется, этот актив не будет участвовать в формировании эффективной границы. Необходимо перед оптимизацией фондового портфеля исключить заведомо доминированные активы (в [1] это называется «прополкой»).

Но важно подчеркнуть, что и активы монотонного портфеля не все обязательно попадут на эффективную границу. В настоящей статье одновременно дается ответ на два вопроса:

- Что такое монотонный портфель в случае нефондовых активов?
- Какое должно выполняться условие, чтобы актив из монотонного портфеля участвовал в формировании эффективной границы портфельного множества?

Монотонные фондовые портфели

В самом простейшем случае (в классической постановке задачи) эффективная граница портфельного множества удовлетворяет следующему требованию к составляющим ее портфелям:

$$r = \sum_{i=1}^N x_i r_i \rightarrow \max \quad (1)$$

при ограничении на риск портфеля

$$\sigma = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \right)^{1/2} . \quad (2)$$

Здесь N – число активов, \mathbf{x} – вектор весов активов в портфеле, \mathbf{r} – вектор доходностей, $\boldsymbol{\sigma}$ – вектор рисков, $\boldsymbol{\rho}$ – матрица парных корреляций. Все компоненты модели – скалярные величины.

Для монотонных портфелей эффективная граница представляет собой **вогнутую** во всех точках кусочно-непрерывную кривую, собранную из участков парабол, причем левый край границы образован в большей степени активами с минимальным риском, а правый край – активами с максимальным доходом. Кривизна параболических участков обусловлена силой связи между активами.

Условие вогнутости эффективной границы однозначно определяет простой критерий принадлежности актива монотонного портфеля портфелям на эффективной границе. Свяжем любые две точки, отвечающие активам монотонного портфеля на плоскости «риск – доходность» отрезком (рис. 1), построив полносвязный неориентированный граф. Если актив участвует в формировании эффективной границы, то соответствующая точка лежит выше всех ребер графа (доходность актива выше доходности произвольной линейной комбинации любых двух других активов монотонного портфеля, (а)). Если это условие не выполняется (б), то актив на эффективную границу не попадет, и эффективная граница будет сформирована оставшимися недоминированными активами.

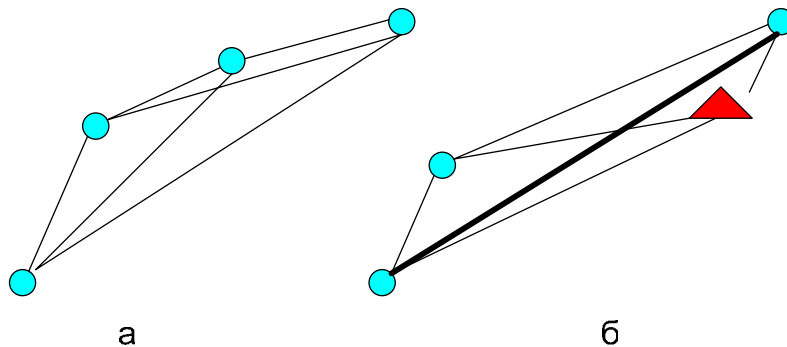


Рис. 1. Критерий попадания актива на эффективную границу

Вогнутость эффективной границы в классическом случае проистекает из (1-2), когда доходность портфеля связана с тем же для активов линейной функцией, а риск портфеля с тем же для активов – параболической функцией. Во всех прочих случаях записи функции риска вогнутость эффективной границы надо доказывать специально.

Монотонный бизнес-портфель

Рассмотрим набор бизнесов, каждый из которых характеризуется своими уровнями доходности и риска. В отличие от классической постановки задачи, запишем эту задачу в нечеткой постановке [2]. Пусть доходность i -го бизнеса, $i=1..N$ – треугольное число $(r_{\min i}, r_{\text{avi}}, r_{\max i})$. Доходность бизнеса можно оценивать как на инвестиционном, так и на операционном базисе. В первом случае доходность бизнеса – это отдача на вложенный капитал, во втором случае – это рентабельность операционных затрат. Будем далее без снижения уровня общности изложения считать, что $r_{\text{av}} > 0$ (если в ожиданиях доходности бизнеса доминируют отрицательные значения, то бизнес теряет смысл).

Мы исключаем из модели все гипотезы, определяющие бизнес как стохастический объект. Мы не накладываем на перформанс доходности бизнеса требований винеровского случайного процесса (откуда, собственно, проистекает нормальность или логнормальность соответствующего распределения доходности – и все следствия отсюда, в частности, задача в постановке Марковица). Мы не рассматриваем корреляцию бизнесов, т.к. и в реальности фондового рынка устойчивая стохастическая связь активов не наблюдается в принципе, да и роль корреляционной матрицы в оптимизации весьма низка. Словом, мы рассматриваем доходность бизнеса как нечеткую величину без связи (регрессии) с другими бизнесами в портфеле, понимая риск бизнес-портфеля исключительно как ожидание отрицательных значений доходностей по результату операций с бизнес-портфелем.

Риск бизнеса как возможность отрицательной доходности может оцениваться по формуле [2]:

$$\text{Risk}_i = L_i \times \left(1 + \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \times \ln(1 - \alpha_i)\right), \quad (3)$$

где

$$L_i = \frac{-r_{\min i}}{r_{\max i} - r_{\min i}}, \quad (4)$$

$$\alpha_i = \frac{-r_{\min i}}{r_{\text{avi}} - r_{\min i}}. \quad (5)$$

Если выполняется, что бизнесы в портфеле являются недоминированными по критериям доходности и риска, то портфель бизнесов является **МОНОТОННЫМ**.

Переход к доходности и риску по портфелю осуществляется по формулам:

$$\text{Return} = (R_{\min}, R_{\text{av}}, R_{\max}) = \sum_i x_i \times (r_{\min i}, r_{\text{av} i}, r_{\max i}) = \max \quad (6)$$

$$\text{Risk} = L \times \left(1 + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \times \ln(1 - \alpha)\right) = \text{fix}, \quad (7)$$

где

$$L = \frac{-\sum_i x_i r_{\min i}}{\sum_i x_i r_{\max i} - \sum_i x_i r_{\min i}}, \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{-\sum_i x_i r_{\min i}}{\sum_i x_i r_{\text{av} i} - \sum_i x_i r_{\min i}}. \quad (9)$$

Формулы (6-9) – это параметрическое описание эффективной границы портфельного множества, по аналогии с (1-2). Можно показать, что (6-9) не является в общем случае вогнутой функцией по переменной Risk. Рассмотрим пример 1.

Пример 1. В портфеле находятся 2 бизнеса, которые характеризуются инвестиционной доходностью в форме NPV (чистой современной ценности бизнеса) по завершении горизонта инвестирования (таблица 1):

Таблица 1.

Название варианта	NPV по вариантам, млн. долл.			Risk _i
	<i>min</i>	<i>av</i>	<i>max</i>	
Вариант 1. Покупка облигаций	4.2	6.2	8.9	0
Вариант 2. Строительство и продажа объекта	-42.6	29.1	143.1	9%

Как видно из табл. 1, вариант 1 является консервативно-безрисковым, а вариант 2 – агрессивно-рискованным. Их взвешенное сочетание дает эффективную границу вида рис. 2.

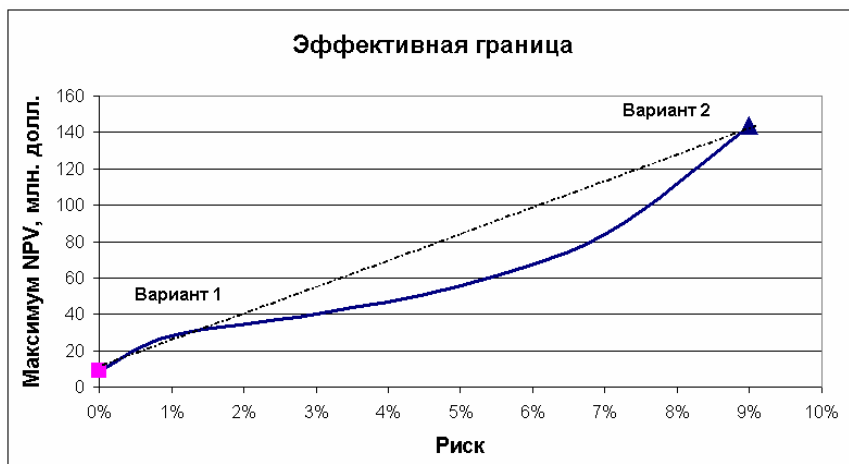


Рис. 2. Отсутствие вогнутости функции эффективной границы

Как видим, не о какой вогнутости границы нет и речи (для ориентира варианты 1 и 2 на плоскости соединены отрезком пунктирной прямой).

Фундаментальное свойство отсутствия вогнутости, которое мы обнаружили здесь, нуждается в осмыслении. Все дело в логарифмической зависимости (7), которая, в свою очередь, вызвана интегрированием дробно-рациональной функции первого порядка. А дробно-рациональная функция возникает из-за линейности границ треугольного числа. Таким образом, отсутствие вогнутости эффективной границы – это врожденный аспект задач оптимизации на треугольных числах. Это непривычно, но это – математический факт, и с этим придется жить.

Треугольная форма нечетких чисел, как мы видим, с неизбежностью порождает то свойство, что в ряде случаев снижение риска по портфелю сопровождается ускоренным снижением его доходности (свойство выпуклости). Для вогнутых границ характерно обратное: снижение доходности портфеля сопровождается форсированным снижением риска (вогнутость, свойство сопротивляемости портфеля).

Соответственно, любой новый бизнес, который лежит выше границы на рис. 2, будет участвовать в образовании новой эффективной границы, лежащей выше данной. Это сохранится и тогда, когда этот бизнес будет лежать ниже пунктирной линии на рис.1. То есть отсутствие вогнутости границы является основанием для того, чтобы не исключать «невыпуклые» варианты (по смыслу рис. 1), и классический критерий отбора активов, отвечающей вогнутому характеру эффективной границы, здесь неприменим.

Не следует упускать из внимания и факт перегиба, когда граница перестает быть выпуклой и становится вогнутой (вторая производная функции в точке перегиба меняет знак). Наличие неоднородности говорит о том, что портфели при снижении их доходности могут испытывать одновременно как форсированное, так и

замедленное снижение риска. Все здесь зависит от местоположения портфеля на эффективной границе: у левой точки границы граница ведет себя вогнуто, у правой – выпукло.

Соответственно, критерий отбора активов для портфеля усложняется. Если нарисовать картинку, аналогичную рис. 1, но вместо участков прямой соединить все точки (бизнесы) участками эффективной границы вида рис. 2, то тогда критерий браковки точек – такой, когда они лежат ниже хотя бы одного из участков таких границ (рис. 3).

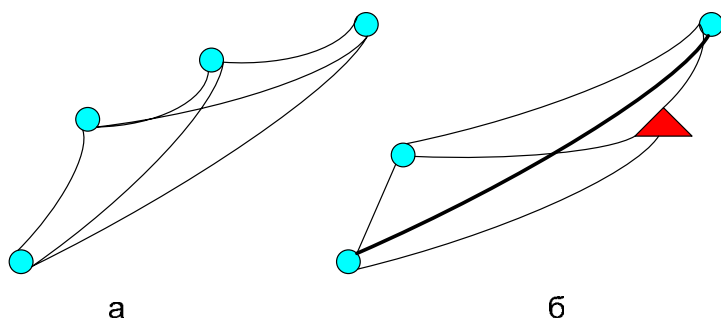


Рис. 3. Критерий исключения актива из состава эффективной границы

Разумеется, этот критерий является сугубо формальным, и при наличии эффективных программных средств, реализующих алгоритм оптимизации, все неоптимальные активы будут исключены из процесса формирования эффективной границы автоматически.

Рассмотрим еще один пример.

Пример 2. В бизнес-портфеле торгового центра 3 бизнеса, каждый из которых характеризуется своей операционной рентабельностью (в процентах валового дохода к операционным затратам). Данные приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Название варианта	Рентабельность по вариантам, %			Risk _i
	<i>min</i>	<i>av</i>	<i>max</i>	
Вариант 1. Продукты питания	3.9	4.5	5.2	0
Вариант 2. Стройматериалы	-8.1	4.0	15.3	16%
Вариант 3. Товары для дачи	-16.1	4.9	19.6	25%

Разброс параметров в табл.2 обусловлен выраженной сезонностью продаж, когда по прошествии лета склады затовариваются, что вызывает необходимость широких

распродаж товаров даже ниже их операционной себестоимости (чтобы отсечь убытки).

Эффективная граница множества монотонных бизнес-портфелей приведена на рис. 4. Видим, что она очень напоминает отрезок прямой линии. При этом Вариант 1 не лежит на эффективной границе «в чистом виде» (оказывается, 65% варианта 1 плюс 35% варианта 2 уже дают практически нулевой риск по портфелю в целом).

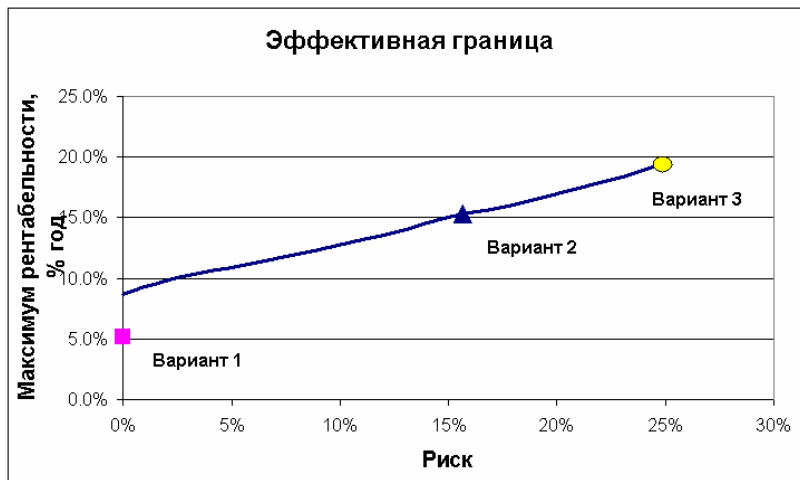


Рис. 4. Эффективная граница для примера 2

Заключение

Мы определили монотонный бизнес-портфель как портфель, составленный из недоминированных по критерию доходности и риска альтернативах. У множества таких портфелей есть эффективная граница, и в общем случае она не является вогнутой по переменной риска. Оптимизация на треугольных числах приводит к логарифмической мере риска, что вызывает выпукло-вогнутый характер эффективной границы.

Перечень цитируемых источников

1. Недосекин А.О. Монотонные фондовые портфели и их оптимизация // Аудит и финансовый анализ, № 2, 2002.
2. Недосекин А.О. Риски бизнеса и их измерение // Банки и Риски, №2, 2005. CD-версия журнала.