Оптимизация фондового портфеля, содержащего call-опционы

Недосекин А.О., ст. консультант Siemens Business Services, д.э.н., к.т.н.

Введение

В предыдущей статье, написанной по теме анализа фондового портфеля с деривативами **[1]**, мы предложили метод оптимизации фондового портфеля, содержащего put-опционы. Мы показали, что эффективно эта задача может решаться только в нечеткой постановке, когда доходность актива портфеля – нечеткая величина.

Механизм воздействия put-опционов на портфель вполне понятен. Это – хеджирование рисков недопустимого снижения доходности. Для размытой доходности активов эффективный put-опцион повышает нижний уровень доходности актива, одновременно снижая и верхнюю границу доходности. Тем самым разброс доходности снижается, что приводит к снижению риска актива в общем смысле. В том смысле, как понимаем риск мы (диск недопустимого снижения цены актива), определенности в отношении количественного уровня риска сборки «актив + put-опцион» нет. Но в большинстве случаев он тоже снижается.

Если доходность подлежащего актива – интервал, то доходность сборки «актив + put-опцион» - также интервал, равно как и доходность портфеля. Если доходность актива – треугольное число, то доходность сборки актива с опционом – усеченное треугольное число (ТТ-вид **[1]**), а доходность портфеля – кусочно-ломаное число (BL-вид **[1]**). В самом общем случае доходность портфеля – это нечеткое число произвольного вида. Как бы там ни было, для произвольного портфеля мы умеем определять нижний уровень доходности и риск недопустимого снижения этой доходности. Соответственно, мы можем на основе специальной вычислительной процедуры (называемой нами градиентным методом) восстанавливать эффективную границу портфельного множества, тем самым решая задачу оптимизации фондового портфеля.

В продолжение начатой темы, мы исследуем эффективность и риск внедрения в портфель опционов противоположной направленности – call-опционов. Если мы верно угадали направление потенциального движения цены актива, то с введением call-опциона на этот актив мы можем «форсировать» актив и портфель в целом, заработав на приросте курсовой цены подлежащего актива дважды: владея самим активом и опционом на актив. Таким образом, правая граница доходности сборки «актив + call-опцион» смещается вправо, а левая граница – влево. Стандартный риск (разбег) возрастает, риск недопустимого снижения доходности неоднозначен. Однако, если целью инвестора является возможный дополнительный доход (даже ценой роста риска), то форсирование предоставляет инвестору такую возможность. Соответственно, правая точка на эффективной границе уже не соответствует активу с максимумом расчетной доходности, но она соответствует сборке этого актива с call-опционом. Выяснить, как трансформируется эффективная граница портфельного множества с введением в нее call-опционов – тема настоящего исследования.

1. Количественный анализ механизма введения call-опциона в портфель

1.1. Доходность актива – треугольное нечеткое число

Рассмотрим простейший случай описания доходности подлежащего актива как нечеткого числа.

Пусть мы купили актив по цене P_0 и собираемся держать его в портфеле в течение периода T. Наш анализ рынка показывает, что по состоянию на момент T цена нашего актива P может колебаться в следующих пределах:

- наихудшая цена – $P=P_{min}$;
- среднеожидаемая цена – $P=P_{av}$;
- максимальная цена – $P=P_{max}$.

Если моделировать доходность такого актива как треугольное нечеткое число, то можно записать:

$$r = \left(\frac{P_{min} - P_0}{T \times P_0}, \frac{P_{av} - P_0}{T \times P_0}, \frac{P_{max} - P_0}{T \times P_0} \right) \qquad (1)$$

Вид «треугольного» представления будущей цены актива показан на рис. 1.

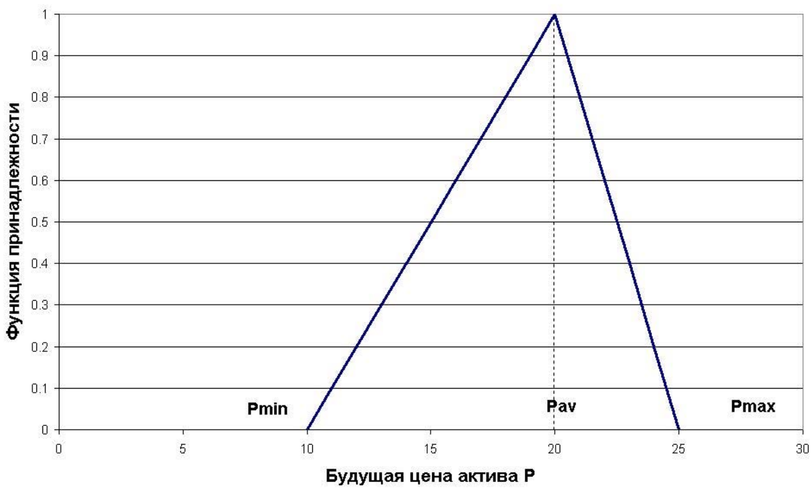

Рис. 1. Будущая цена актива как треугольное нечеткое число

Теперь дополним наш актив call-опционом на глубину 100%. Это означает, что для виртуального круглого лота из 100 долей, составляющих подлежащий актив (заметим попутно, что акции на бирже торгуются круглыми лотами по 100 штук), мы покупаем круглый лот call-опционов размером 100 штук. Пусть цена опционного лота составляет z_c, а страйк (цена исполнения опциона) на подлежащий актив, оговоренный в опционе, составляет y_c. Естественно, $y_c < P_{max}$, в противном случае хеджирование не имеет смысла. Также для условий рационального рынка выполняется $y_c > P_{av}$ (никто из лиц, выписывающих опцион, не будет действовать себе в убыток, вопреки сложившимся ценовым ожиданиям). Здесь и далее будем называть такой актив «форсированным», говоря при этом о сборке «актив + δ% call-опцион».

И теперь мы видим, что доходность подлежащего актива с внедрением опционного лота претерпела изменения. Мы заплатили опционную премию, и теперь доходность 100%-но форсированного актива имеет вид **[2]**:

$$r = \begin{cases} \dfrac{P - P_0 - z_c}{T \times (P_0 + z_c)}, P \le y_c \\ \dfrac{2P - y_c - P_0 - z_c}{T \times (P_0 + z_c)}, P > y_c \end{cases} . \tag{2}$$

Таким образом, будущая цена сборки «подлежащий актив + 100% call-опцион» приобретает кусочно-ломаный BL-вид, рис. 2.

Рис. 2. Будущая цена сборки «актив + опцион» как число BL-вида

Видим, что по сравнению с рис. 1, исходная треугольная форма числа терпит излом в абсциссе, отвечающей страйку опциона y_c. Разумеется, доходность такой сборки тоже является числом BL-вида, безотносительно глубины форсирования δ.

Согласно результату из **[1]**, средневзвешенная сумма BL-чисел есть BL-число. Таким образом, мы всегда можем определить доходность портфеля в любой точке портфельного множества за минимальное число операций, аналитически или приближенно (сегментным способом). Тем самым, сохраняется идеологическая основа для использования градиентных методов восстановления эффективной границы

1.2. Доходность актива - интервал

Еще более простой случай постановки задачи – представление будущей цены актива как интервала (прямоугольного нечеткого числа). При хеджировании такого актива будущая цена сборки «актив + δ-форсированный call-опцион» также носит интервальный характер. Нетрудно показать, что ожидаемая доходность такой сборки:

$$r = \left(\delta \frac{P_{min} - z_c - P_0}{T \times (P_0 + z_c)} + (1-\delta)\frac{P_{min} - P_0}{T \times P_0}, \delta \frac{2P_{max} - y_c - z_c - P_0}{T \times (P_0 + z_c)} + (1-\delta)\frac{P_{max} - P_0}{T \times P_0} \right). \quad (3)$$

2. Постановка задачи оптимизации портфеля с опционами

Рассматривается расширенный фондовый портфель, состоящий из двух субпортфелей:

А. Субпортфель подлежащих активов. Он содержит N компонент, каждая из которых (i = 1..N) характеризуется своей финальной доходностью r_i (оцененной в точке T как относительное приращение цены актива за период), причем r_i является **нечеткой величиной** (в частном случае – треугольного или интервального вида)**.**

Б. Субпортфель call-опционов. Содержит N наборов call-опционов. Каждый из наборов осуществляет форсирование соответствующего подлежащего актива с глубиною δ_i от 0 до 1. Если $\delta_i = 0$, опционы вообще отсутствуют, а если $\delta_i = 1$, то форсирование 100%-но, т.е. на каждый доллар подлежащего актива.

Таким образом, всего в расширенном портфеле 2N компонент. Вес каждой компоненты оценивается специально на основании цен подлежащих активов и опционных премий, в результате каждый компонент портфеля имеет вес x_i, причем

$$\sum_{i=1}^{2N} x_i = 1,\ 0 \le x_i \le 1. \quad (4)$$

Здесь и далее предполагаем, что доля актива в портфеле и глубина форсирования – бесконечно делимые величины. Также предполагаем, что исходная сумма инвестиций остается без изменений, т.е. снижению веса одной компоненты отвечает прирост весов ряда других компонент того же портфеля.

Владелец портфеля, принимая решение об инвестировании, задается нормативом - нижней границей доходности портфеля на момент T. Она также может быть нечетким числом произвольного вида $[r_{Pmin}(\alpha), r_{Pmax}(\alpha)]$. В вырожденном случае это обычный числовой норматив r_P, например, 15% годовых. Но в большинстве случаев владелец фондового портфеля не очень хорошо представляет себе, на что следует ориентироваться. Например, завтрашний уровень инфляции не известен вполне точно, он колеблется в некоторых пределах. Если нет выпуклого, наиболее ожидаемого значения инфляции, вокруг которого группируются прочие возможности, то имеет место обычный интервал. Соответственно, владелец портфеля желает, чтобы портфель по доходности опережал темп инфляции (вполне естественное ожидание), но он имеет расплывчатые ожидания, как о портфеле, так и об инфляции. Если ожидания портфеля и инфляции пересекаются на некоторых интервалах принадлежности, то налицо риск того, что портфель не «побьет» инфляцию, т.е. инвестиции окажутся неэффективными (подобная ситуация изображена на рис. 3). Как мы показали раньше, доходность портфеля – это число BL-вида.

Рис. 3. Соотношение доходности портфеля и уровня инфляции

Оптимизировать портфель в такой постановке может означать, в частном случае, требование **максимизировать минимум ожидаемой доходности** портфеля в точке времени T при фиксированном уровне риска портфеля. Эффективная граница портфельного множества в этом случае – вогнутая линия в координатах «риск недопустимо низкой доходности портфеля – минимум ожидаемой доходности портфеля». Каждый точке эффективной границы отвечает оптимальный портфель с **четкими** границами. Таким образом, вся нечеткость, возможностность модели «прячется» в показателе риска недостаточной доходности. При этом вектор {x} является решением задачи оптимизации, а вектор {δ} досчитывается на основе {x} автоматически.

3. Решение задачи оптимизации

При фиксированном векторе {x} мы получаем доходность портфеля как число BL-вида. Риск того, что доходность портфеля будет ниже норматива, выражается формулой **[5]**:

$$\text{Risk} = \text{Poss}\ \{r < r_P\} \approx \sum_{(\alpha)} \frac{S_\alpha \Delta\alpha}{(R_{2\alpha} - R_{1\alpha})(G_{2\alpha} - G_{1\alpha})}, \tag{5}$$

где $\Delta\alpha$ - уровень дискретизации по принадлежности α (например, 0.01), $[R_{1\alpha}, R_{2\alpha}] = [r_{min}(\alpha), r_{max}(\alpha)]$, $[G_{1\alpha}, G_{2\alpha}] = [r_{Pmin}(\alpha), r_{Pmax}(\alpha)]$ (сокращения, введенные для удобства записи), и

$$S_\alpha = \begin{cases} 0, G_{2\alpha} \le R_{1\alpha} \\ \dfrac{(G_{2\alpha} - R_{1\alpha})^2}{2}, \qquad G_{1\alpha} < R_{1\alpha} < G_{2\alpha} \le R_{2\alpha} \\ \dfrac{(G_{1\alpha} - R_{1\alpha}) + (G_{2\alpha} - R_{1\alpha})}{2} \cdot (G_{2\alpha} - G_{1\alpha}), R_{1\alpha} \le G_{1\alpha} < G_{2\alpha} \le R_{2\alpha} \\ \dfrac{(G_{2\alpha} - R_{2\alpha}) + (G_{2\alpha} - R_{1\alpha})}{2} \cdot (R_{2\alpha} - R_{1\alpha}), G_{1\alpha} \le R_{1\alpha} < R_{2\alpha} \le G_{2\alpha} \\ (G_{2\alpha} - G_{1\alpha})(R_{2\alpha} - R_{1\alpha}) - \dfrac{(R_{2\alpha} - G_{1\alpha})^2}{2}, R_{1\alpha} \le G_{1\alpha} \le R_{2\alpha} \le G_{2\alpha} \\ (G_{2\alpha} - G_{1\alpha})(R_{2\alpha} - R_{1\alpha}), R_{2\alpha} \le G_{1\alpha} \end{cases} . \quad (6)$$

Замечание. Соотношения (5) – (6) действуют и для случая, когда доходность портфеля и норматив являются нечеткими числами произвольного вида.

Таким образом, для каждого соотношения векторов $\{x\}$ мы умеем определять ожидаемую доходность портфеля по формуле Дюбуа-Прада, а риск портфеля как обычное скалярное число - по (5) – (6). Теперь можно переходить к решению задачи оптимизации портфеля.

Будем считать, что оптимальным является портфель, у которого, при заданном уровне риска неэффективности (5), максимально возможное значение доходности является максимальным. В формульной записи это означает

$$r_{max}\ (\alpha=0) \ \to \max, \qquad (7)$$

при ограничениях на размер долей портфеля вида (4) и вида равенства на размер Risk = $Risk_0$. Такая постановка задачи оптимизации отличается от того, что мы сделали в предыдущей статье **[1]**. Указанное различие обусловлено тем, что put-опционы применяет консервативный инвестор, для которого риск важнее доходности. Агрессивный инвестор, напротив, ориентируется скорее на доходность, нежели на риск, - т.е. на максимум успеха, а не на минимум потерь.

Поскольку не существует общего аналитического вида зависимости Risk (6), то не существует и общего решения задачи оптимизации (7). Эту задачу можно решить только приближенными методами, например, **градиентным методом**, который описывается следующим алгоритмом **[1]**:

1. Мы строим эффективную границу портфельного множества в координатах «риск неэффективности портфеля – максимум доходности портфеля». Обозначим max $\{r_{max}\ (\alpha=0)\}$ = Eff (от «efficient frontier»). Тогда уравнение для эффективной границы имеет вид

   $$Eff = Eff\,(Risk_0) = Eff\,(Risk). \qquad (8)$$

2. Правая точка границы вида (8) определяется по активу с максимумом $r_{imax}(\alpha=0)$, к которому в сборку добавляется 100%-форсирующий опцион (заранее проверяется, что максимум доходности такой сборки выше максимума доходности актива без

опциона). Обозначим номер этого актива как I. Тогда в соответствующем оптимальном портфеле

$x_I > 0,\ x_{I+1} > 0,\ x_i = 0,\ i \neq I, I+1,\ \ \delta_I = 1.$ (9)

Абсцисса правой точки границы (8) определяется по (5)-(6), обозначим ее Risk2. Ординату правой точки границы обозначим Eff2 = Eff(Risk2).

3. Контролируем вырождение границы. Если левый край границы совпадает с правым, то она вырождается в точку, и алгоритм останавливается. Контроль производится следующим образом. По каждому i-му активу, $i \neq I$, формируется относительно малое приращение долей Δx_i, сопровождаемое соответствующим снижением доли Δx_I, и замеряются соответствующие изменения уровней ΔEff и ΔRisk. Назовем отношение ΔEff/ΔRisk **градиентом** (по смыслу, это приближение первой производной эффективной границы). Тогда, если для каждого i-го актива (в связи с убыванием Δx_i) градиент будет отрицательным (т.е. снижение доходности сопровождается ростом риска), то построение эффективной границы завершено, и алгоритм останавливается.

   Вообще говоря, каждая точка эффективной границы обладает **минимумом градиента**, и это обуславливает **вогнутость** эффективной границы во всех точках. Если бы это было не так, то, как доказывается во всех учебниках по портфельной оптимизации, существовал бы портфель, лежащий выше эффективной границы, что противоречит определению эффективной границы.

4. Если вырождения эффективной границы нет (она не сжимается в точку), алгоритм градиентной оптимизации начинает работу. Выбирается пара активов (i, j), для которых, при снятии малой доли с i-го актива и при переносе ее на j-ый актив, положительный градиент обладает **минимальным** значением. На эффективной границе появляется новая точка с координатами ($Risk_i$, Eff_i), соответствующая портфелю с оптимально перераспределенными долями. И затем алгоритм возвращается на предыдущий шаг 3, с контролем завершения процесса восстановления эффективной границы (пока все возможные градиенты не сделаются отрицательными).

Градиентный метод, изложенный здесь, лежит в основе решения **[3].** Главным достоинством этого алгоритма является его адаптивность к любым координатным сеткам «риск – доходность», в том числе и к классической сетке Марковица. То есть вид риска и способ его вычисления для градиентного алгоритма не играет никакой роли.

Рассмотрим расчетный пример, позаимствовав часть данных из предыдущего материала **[1]**.

4. Расчетный пример портфеля с опционами, 2N=8 активов

В связи с тем, что для расчета доходности сборок, содержащих опционы, нам необходимы абсолютные ценовые значения приобретаемых бумаг, мы приводим эти значения в табл. 1. При этом мы так подобрали ценовые параметры, чтобы они корреспондировались с примером из **[1]**. Суммарные инвестиции в портфель неизменны и составляют 1000 условных единиц. Ограничение на нижний размер доходности актива – r_P = 9.5%..11% годовых.

Табл. 1. Исходные данные по активам и опционам

N	Стартовые ценовые параметры				
	P_0	P_{min}	P_{max}	y_c	z_c
1	100	109	114	110	0.2
2	100	108	118	110	0.6
3	100	106	125	110	1
4	100	105	130	110	3

Видно, что приобретаемые опционы обладают одним страйком. Естественно, чем ближе страйк к максимально ожидаемой цене, тем ниже опционная премия.

Для снижения числа итераций будем исследовать только 2 способа форсирования активов: полное форсирование (δ_i = 1) или отсутствие форсирование (δ_i = 0). Тем более что доли в портфеле, отводимые на форсирование, минимальны (меньше 0.1 – традиционного шага сканирования границы).

Данные по эффективной границе, полученные градиентным методом, сведены в табл. 2. График эффективной границы приведен на рис. 4.

Табл. 2. Эффективная граница

N	Веса компонент								Risk	Eff
	1	2	3	4	5	6	7	8		
0	0	0	0	0	0	0	0.97	0.03	**0.19**	**45.6%**
1	0	0	0	0	0.1	0.001	0.873	0.026	0.188	44.4%
2	0	0	0	0	0.2	0.002	0.773	0.025	0.185	44.2%
3	0	0	0	0	0.301	0.003	0.675	0.021	0.182	43.5%
4	0	0	0	0	0.404	0.004	0.575	0.017	0.179	42.5%
5	0	0	0	0	0.504	0.005	0.477	0.014	0.176	41.8%
6	0	0	0	0	0.605	0.006	0.377	0.012	0.173	41.1%
7	0	0	0	0	0.706	0.007	0.278	0.009	0.169	40.4%
8	0	0	0	0	0.806	0.008	0.18	0.006	0.166	39.7%
9	0	0	0	0	0.906	0.009	0.082	0.003	0.162	38.9%
10	0	0	0	0	0.99	0.01	0	0	0.157	38.6%

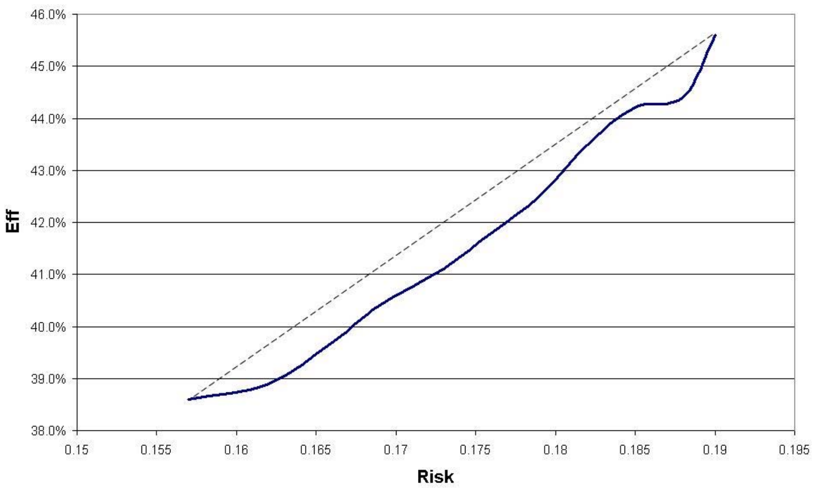

Рис. 4. Эффективная граница портфеля с опционами

Видно, что классической вогнутости граница не имеет (из-за дискретности в решении по форсированию $\delta_i = 1$ или $\delta_i = 0$). Также видно, что если бы допущение о дискретности было снято, то граница портфельного множества была бы отрезком прямой линии (пунктир на рис. 4). Также надо отметить, что опционы, форсирующие активы 1 и 2, оказались неэффективными (в силу близости страйка к максимумам цены на эти активы).

Еще скажем, что отказ от опционов в нашей схеме приводит к тому, что эффективная граница портфельного множества вырождается в точку, которую составляет портфель, целиком состоящий из актива 4. Простые вычисления показывают, что любое приращение долей альтернативных активов приводит к росту риска портфеля при одновременном снижении его эффективности, и градиент становится отрицательным. Возможно, факт вырождения границы в этом случае связан с тем, что для форсированных двух активов эта граница является отрезком прямой. Однако это соображение нуждается в некотором теоретическом обосновании, на которое у автора данной статьи не хватило сил.

Заключение

Постепенно наши исследования в области портфелей с опционами приобретают практический уклон. Очень многое, оказывается, можно сказать об оптимальном портфеле и о границе портфельного множества, не прибегая к громоздким вычислениям. Можно судить о том, какие опционы являются эффективными, какие нет, как расположатся активы на эффективной границе, все ли они будут хеджированы или форсированы.

Две последующие статьи этого цикла, замыкающие ближний круг исследования будут иметь следующую тематику:

1. Оптимизация портфеля, целиком состоящего из одних опционов разной функциональности.
2. Рассмотрение самого общего случая портфеля, содержащего как put-, так и call-опционы.

Список цитируемых источников

1. Недосекин А.О. Оптимизация фондового портфеля, содержащего put-опционы // Банки и Риски, № 1, 2005. – Также на сайте: http://sedok.narod.ru/s_files/2005/2.pdf .
2. Недосекин А.О. Нечетко множественный анализ риска фондовых инвестиций. – СПб, Сезам, 2002. – Также на сайте: http://www.mirkin.ru/_docs/book23.pdf .
3. Система оптимизации фондового портфеля (Сименс Бизнес Сервисез Россия). – На сайте http://www.sbs.ru/index.asp?objectID=1863&lang=rus .