Невероятностная концепция риска в оптимизации портфеля

П.В. Севастьянов, профессор Ченстоховской Политехники, Польша, профессор, д.т.н.
Л.Г. Дымова, профессор Ченстоховксой Политехники, Польша, д.т.н.

В статье обосновывается методологическая несостоятельность моделей оптимизации портфеля, базирующихся на рассмотрении риска как степени изменчивости портфельного дохода (модели Марковица, Шарпа и их вариации). Предожен новый подход к оценке риска, основанный естественном для инвесторов восприятии риска в форме ожидаемых финансовых потерь. В итоге проблема оптимизации потфеля формулируется как задача нечеткой двухкритериальной оптимизации. Поэтому особое внимание в статье уделяется проблеме выбора адекватного способа агрегирования частных критериев минимизации потерь и максимизации доходов. На основе предложенной общей методологии разработаны конструктивные методы, позволяющие осуществлять оперативное управление портфелем даже в случае краткосрочных инвестиций.

1. Проблемы вероятностного подхода к оценке риска

В основе классических методов портфельной оптимизации (модель Марковица **[1,2]**, Шарпа **[3]**, VAR-метод **[4]**), а также их многочисленных модификаций и гибридов в явной или неявной форме заложено предположение, что риск может быть оценен как степень изменчивости (volatility) анализируемого финансового инструмента. В качестве меры изменчивости обычно принимается среднеквадратическое отклонение. Это позволило Марковицу и затем Шарпу не только построить изящные математические модели портфельной оптимизации, но получить за это нобелевские премии (по экономике). Однако на практике эти модели, а также VAR-метод, несмотря на их научную глубину, почти не используются **[5]**. Дело не в их сложности или в необходимости использования информации, отсутствуюшей в реальных ситуациях. Корень проблемы в методологичекой несостоятельности использования степени изменчивости (в любой форме) как меры риска.

Рассмотрим вначале математическую сторону проблемы. Напомним основные положения подхода Марковица.

Пусть имеется фондовый портфель из n модельных компонент на интервале $[0,T]$. Пусть r_i - прогнозируемая на момент T доходность i –й компоненты ($i = 1,...,n$), σ_i - стандартное отклонение этой доходности и x_i – доля этой компоненты в портфеле.

Тогда модель Марковица может быть сформулирована следующим образом:

$$\min \sigma \quad \text{при условиях } R=R_e, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

где $R=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ ожидаемая доходность портфеля, R_e - минимальная допустимая доходность портфеля и $\sigma=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i^2+\sum_{i=1}^{}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}x_i x_j$ (ρ_{ij} -коэффициетны парной корреляции) – мера риска.

Допустимы и другие формулировки, например,

$R \to \max$ при условиях $\sigma \le \sigma_e$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$,

где σ_e-максимальный допустимый риск, или

$R - K\sigma \to \max$ при условии $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$,

где K-параметр, определяемый склоностью инвестора к риску (risk aversion) .

Из этих формулировок следует, что мерой риска является σ (также в модели Шарпа и в рамках *VAR*-метода). Поэтому, когда адептов вероятностного подхода спрашивают: «Что же такое риск?», звучит бодрый ответ: «Это среднеквадратическое отклонение доходности портфеля».

Однако куда труднее ответить на несколько неуклюжий, но весьма ядовитый для теории вопрос: «Если это риск, то риск **Чего**?»

Для нормального инвестора понятие риска обычно связано с опасениями потери слишком большой по его оценкам (часто таже по оценкам брокера) части депозита. Ясно, что существуют и другие формулировки, однако они всегда достаточно конкретны. Поэтому и используемая математика должна оперировать с понятиями, хорошо интерпретируемыми в финансово-экономических категориях (проще говоря, в деньгах).

Покажем, что основой модели Марковица являются параметры, имеющие мало общего с реальностью.

1. Исходным постулатом моделей Марковица, Шарпа и *VAR*-метода является нормальность распеределений доходности компонент портфеля. Согласно американским исследованиям **[6]**, что-то похожее на нормальное распределение в финансово-экономической сфере является, скорее, исключением. Действительно, кто же будет покупать акции со случайными отклонениями цен, симметричными по отношению к ожидаемым ценам. Ясно, что доходы и потери при этом равновероятны. Это известно не только практикам, но и теоретикам, которые в оправдание утверждают, что нормальное распределение может служить только приближением реального несимметричного распределения.

Однако в случае несиметричного распределения средние значения r_{ei} уже не являются наиболее вероятными ожидаемыми доходностями и сам термин «математическое ожидание» теряет содержательный смысл, становится математической абстракцией. Соответственно теряет содержательный смысл σ, поскольку его единственно правильным определением становится «среднеквадратическое отклонение от математической абстракции». Как следствие, выражения

$$R=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad , \tag{1}$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} x_i x_j \qquad (2)$$

также теряют смысл.

2. Предположим, мы все же отыскали несколько компонент с нормальными распределения доходности и пусть r_{ei} - математические ожидания r_i, σ_i -стандартные отклонения. В теории Марковица σ_i расматривается как оценка риска *i*-ой компоненты. Поэтому, если в каком-то случае мы наблюдаем $r_i = r_{ei} + 0.5\sigma_i$, а в другом $r_i = r_{ei} - 0.5\sigma_i$, мы должны рассматривать эти реализации случайного дохода как одинаково рискованные. Конечно, это абсурд, однако становится ясно, что расматривать σ_i или другую меру изменчивости как оценку риска, по меньшей мере, рискованно.

3. В хороших учебниках математической статистики строго доказывается, что коэффициент парной корреляции ρ_{ij} отражает только **степень линейной** зависимости анализируемых переменных. Другими словами, если $y = 100x$, то $\rho_{xy} = 1$, и, если $y = 0.01x$, то также $\rho_{xy} = 1$. При этом в случае строго нелинейной зависимости, например, $y = x^2$, выполняется $\rho_{xy} = 0$. Как следствие, в случае выраженной нелинейной зависимости между доходностями r_i, выражение (2) редуцируется до $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2$. Точно такой же результат мы получает в случае независимых r_i. Комментарии излишни. К сожалению, во многих учебниках статистики для экономистов (на западе, практически, во всех) коэффициент парной корреляции наивно рассматривается как «мера взаимной зависимости случайных величин».

Критику модели Марковица, а также Шарпа и *VAR*-метода можно было бы продолжить. Весьма обстоятельно это сделано в **[7]**.

Однако для дальнейшего рассморения важен главный вывод: среднеквадратическое отклонение доходности или другая мера изменчивости не может рассматриваться в качестве меры риска.

В последнее время в связи в активным проникновением в экономико-математическую сферу методов теории нечетких множеств, теории возможности, теории грубых множеств и обобщающей их (вместе с теорией вероятностей) теории свидетельств Демстера-Шефера стало модным сваливать всю ответственность за практическую несостоятельность математически безупречной классической портфельной теории на недостатки теории вероятностей. В этом много правды. Проанализируем следующую сентенцию Б. Рассела: «Математическая вероятность возникает всегда из комбинации двух высказываний, одно из которых может быть полностью известным, а другое совершенно неизвестно. Если я вынимаю из колоды карту, то каков шанс, что это будет туз? Я полностью знаю строение колоды карт и знаю, что одна из каждых тринадцати карт есть туз; но я совершенно не знаю, какую карту я вытащу» **[8]**.

В нашем случае с «совершенно неизвестным» все в порядке - это будущая доходность. Тогда в качестве «полностью известного» (колоды карт) остается рассматривать будущее (подчеркиваем) поведение рынка. Однако это полностью противоречит основному постулату экономической науки и практики: «источником прибыли на рынке является его неопределенность» **[9]**. К сожалению, эта неопределенность слишком неопределенна, чтобы ее можно было адекватно описать с помощью традиционных статистических методов. Использование несимметричных частотных распределений также не облегчает ситуацию.

Применение методов теории нечетких множеств и теории возможностей значительно облегчает решение портфельной проблемы **[10]** уже хотя бы потому, что позволяет уйти от «проклятия нормальности частотных распределений». Конечно, имеется и ряд других преимуществ, например, возможность учета на нечетком уровне описания влияния политических событий **[11]**. Тем не менее, общим для этих работ является стремление «поправить» классическую концепцию риска, основанную на мере изменчивости, путем замены частотного распределения нечетким числом **[12,13]**, распределением возможностей **[14,15]** или каким–либо сложным гибридом, например, нечетко-вероятностным **[10]**. Однако, «родимое пятно» модели Марковица остается на месте: риск – мера изменчивости дохода. Это обстоятельство не было сразу замечено на фоне значительного расширения возможностей учета реальных неоределенностей в формулировке портфельной проблемы. Будучи людьми честными, признаемся, что также поддались общей эйфории «нечеткого улучшения» теории Марковица **[16,17]**, однако в ходе исследований пришли к необходимости выработки более простых и, в то же время, реалистичных подходов к оценке портфельного риска **[18]**. Отметим, что ранее подобные выводы сделаны в работах А. Недосекина **[19]**.

2. Портфельный риск с точки зрения инвестора

Вначале сделаем смелое заявление: корень проблемы в различном отношении к ней участников ее решения. Для математика портфель – это изящная математическая модель, для инвестора - место, где ему предстоит зарыть деньги (на поле чудес).

Для того чтобы представить наш подход более прозрачно, положим, что будущие доходы представлены интервалами возможных значений, т.е., $r_i = [\underline{r}_i, \overline{r_i}]$. Отметим, что на практике обычно известны ожидаемые интервалы (разброс прогнозов финансовых аналитиков) и так называемые консенсусные значения. Тогда для дохода портфеля получаем выражение:

$$R = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = [\underline{R}, \overline{R}]. \tag{3}$$

Пусть *A, B, C* три конкурирующих портфеля (Рис.1). Что же в этом случае является риском портфеля? В духе теории Марковица мы должны бы отождествлять риск с неопределенностью прогнозируемого дохода, которая в рассматриваемой ситуации вполне естественно представлена шириной интервала. Короче, чем шире интервал доходности, тем выше риск портфеля. Тогда портфель *A* формально в 3 раза рискованнее, чем *B* и *C*. Безусловно, такая оценка выглядит корректно, когда мы сравниваем портфели *A* и *B*, однако любому нормальному инвестору портфель *C* покажется намного более рискованным, чем *A*. Совершенно очевидно, что в этом случае отождествление риска с мерой изменчивости приводит к противоречию со здравым смыслом. Действительно, если портфель *A* принять как более рискованный чем *C*, то использование портфеля *A* связано с приятным риском получения больших доходов.

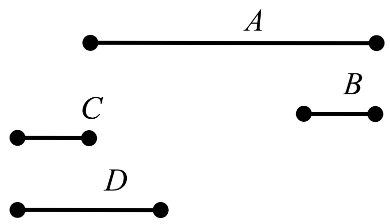

Рис. 1. Интервальные доходы конкурирующих портфелей

Чем же является в этом случае риск для инвестора (не для математика)? Вначале рассмотрим ситуацию несколько упрощенно. Инвестор, формируя портфель, естественно рассчитывает на прибыль и будучи оптимистом (пессимистов на рынке по определению быть не может) стремится не только избежать потерь, но и не допустить слишком малых доходов (если есть другие инвестиционные возможности). В любом случае он будет стремиться максимизировать нижнюю границу возможных (прогнозируемых) доходов. Назовем это стремлением снизть риск. Ясно, что минимизация потерь полностью вписывается в это определение. Однако лучше с инвестором на эту тему не разговаривать: портфели с ожидаемыми потерями инвестируемых средств можно рассматривать только как абстрактную модель, хотя на практике никто не гарантирован от банкротства.

В рамках этой концепции минимизация портфельного риска эквивалентна максимизации левой границы прогнозируемого портфельного дохода, т.е. $\underline{R} \to \max$.

С другой стороны, инвестор стремится максимизировать ожидамые доходы. Поскольку речь идет о будущих, т.е., возможных доходах, портфель D (Рис.1) выглядит предпочтительнее портфеля C, поскольку общает большие доходы при том же самом риске (в смысле $\underline{R} \to \max$). Поэтому требование максимизации дохода можно сформулировать как $\overline{R} \to \max$.

Представим сформулированные требования минимизации риска и максимизации дохода в критериальной форме.

Из выражения (3) и условия $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ следует , что минимимальное возможное значение $\underline{R}$ вычисляется как $\underline{R}_{\min} = \min_i(\underline{r}_i)$, а максимальное значение $\overline{R}$ как $\overline{R}_{\max} = \max_i(\overline{r}_i)$.

Поскольку $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i x_i, \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i x_i$, справедливо неравенство $\underline{R}_{\min} \le \underline{R} \le \overline{R} \le \overline{R}_{\max}$. Тогда риск портфеля можно можно представить выражением:

$$Risk = \frac{\overline{R}_{\max} - \underline{R}}{\overline{R}_{\max} - \underline{R}_{\min}}.$$

Очевидно, максимальный риск равный 1 получаем при $\underline{R} = \underline{R}_{\min}$, однако в задачах оптимизации удобнее пользоваться критерием неприятия риска “risk aversion”, *RA*, дуальным по отношению к критерию $Risk$:

$$RA = 1 - \frac{\overline{R}_{\max} - \underline{R}}{\overline{R}_{\max} - \underline{R}_{\min}}. \tag{4}$$

Ясно, что требование $Risk \to \min$ эквивалентно требованию $RA \to \max$.
Аналогично вводим критерий доходности портфеля:

$$PR = 1 - \frac{\overline{R}_{\max} - \overline{R}}{\overline{R}_{\max} - \underline{R}_{\min}}. \tag{5}$$

Для решения задачи оптимизации портфеля частные критерии (4), (5) должны быть агрегированы в обобщенный критерий качества портфеля. В следующем разделе мы покажем, что сделать это правильно не так просто, как кажется на первый взгляд.

3. Двухкритериальная нечеткая оптимизация портфеля

3.1. Постановка задачи

Расширим результаты предыдущего раздела на случай нечетких доходов. Для этого воспользуемся представлением нечетких чисел совокупностями α-уровней. Такой подход позволяет, используя численные методы, оперировать с нечеткими числами практически любой допустимой формы. Напомним кратко суть метода.

Пусть $\tilde{A}$ - нечеткое число на X с функцией принадлежности $\mu_A(x)$, $X\to[0,1]$. Тогда его можно представить совокупностью α-уровней: $\tilde{A}=\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$, где $A_{\alpha}=\{x \in X: \mu_A(x)\geq\alpha\}$ – четкие интервалы. Ясно, что чем сложнее поведение $\mu_A(x)$, тем более густая сеть α-уровней требуется для достаточно точного представления нечеткого числа. Существуют и другие, в том числе, так называемые, классические подходы к определению арифметики нечетких чисел. В **[20]** подробно описаны неприятности, к которым они приводят на практике (неоднократные ссылки на эту книгу объясняются не желанием повысить наш индекс цитируемости, а просто потому, что эта книга выложена на сайте Алексей Недосекина http://sedok.narod.ru/my_news.html -скачивайте на здоровье).

Поэтому нечеткий доход портфельной компоненты мы представим как $\tilde{r}_i = \bigcup_{\alpha} r_{\alpha i}$. Следовательно общий нечеткий доход портфеля также описывается совокупностью α-уровней и на каждом из них частные критерии (4), (5) принимают вид:

$$PR_{\alpha} = 1 - \frac{\overline{R}_{\alpha\max} - \overline{R_{\alpha}}}{\overline{R}_{\alpha\max} - \underline{R}_{\alpha\min}},\quad RA_{\alpha} = 1 - \frac{\overline{R}_{\alpha\max} - \underline{R}_{\alpha}}{\overline{R}_{\alpha\max} - \underline{R}_{\alpha\min}}, \tag{6}$$

где $\underline{R}_{\alpha\min} = \min_i(\underline{r}_{\alpha i})$, $\overline{R}_{\alpha\max} = \max_i(\overline{r}_{\alpha i})$, $\underline{R}_{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_{\alpha i} x_i, \overline{R_{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_{\alpha i}} x_i$.

Для агрегирования PR_α и RA_α, полученных на α-уровнях, может быть использована простая взвешенная сумма. Тогда оценки частных критериев, как функций вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, вычисляются следующим образом:

$$PR_r(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha PR_\alpha(\vec{x}) / \sum_{i=1}^{n} \alpha \text{ , } RA_r(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha RA_\alpha(\vec{x}) / \sum_{i=1}^{n} \alpha \text{ .} \qquad (7)$$

Выражения (7) подчеркивают, что вклад оценки критерия на α-уровне растет с ростом его номера. Конечно, в (7) вместо α могут быть использованы более сложные функции α-уровней. Тем не менее, выражения (7) правильно отражают факт снижения меры неопределенности результатов с ростом α как следствие уменьшения ширины четких интервалов, представляющих нечеткое число на этих уровнях.

Следующая проблема - агрегирование в обобщенный критерий, вообще говоря, антагонистичных частных критериев $PR_r(\vec{x})$ и $RA_r(\vec{x})$ с учетом их относительной важности для инвестора. Проблема выбора лучшего способа агрегирования с помощью строгих математических методов до конца не решается и является предметом постоянной дискуссии в научной литературе **[20,21]**. Проблема имеет важное практическое значение, поскольку все серьезные проблемы принятия решений по определению многокритериальны **[22].** Предложено множество способов агрегирования, однако следующие три способа следует выделить как наиболее часто используемые в практике:

$$D_1(\vec{x}) = \min(PR_r^\beta(\vec{x}), RA_r^\gamma(\vec{x})) \text{ ,} \qquad (8)$$

$$D_2(\vec{x}) = PR_r^\beta(\vec{x})\, RA_r^\gamma(\vec{x}) \text{,} \qquad (9)$$

$$D_3(\vec{x}) = \beta PR_r(\vec{x}) + \gamma RA_r(\vec{x}) \text{,} \qquad (10)$$

где β, γ - ранги (коэффициенты относительной важности для инвестора) частных критериев. Ранги оцениваются инвесторами, т.е., с неизбежной долей субъективизма. Однако в случае только двух частных критериев особых проблем не возникает. Следует только позаботиться о соблюдении обычного ограничения $(\beta+\gamma)/2 = 1$.

Отметим, что при решении задачи оптимизации обобщенные критерии D_1, D_2, D_3 максимизируются. Агрегаты (8) – (10) часто используются как основа для построения более сложных конструкций, однако авторы таких эвристических подходов, как правило, не объясняют смысла производимых математических манипуляций. Детальный анализ достоинств и недостатков выделенных способов агрегации (8) – (10) сделан в **[20,21]**, где с помощью соответствующих теорем и на основе опыта авторов показано, что в общем случае наиболее надежным является предложенная Р. Егером **[23]** min-свертка (8). Мультипликативная свертка (9) менее надежна и, наконец, взвешенная сумма (10) может приводить к абсурдным результатам оптимизации. С другой стороны, выбор наилучшего способа агрегирования для решения реальной проблемы со сложной иерархической структурой критериев весьма затруднителен. Поэтому целесообразно решать проблему, используя все уместные в рассматриваемом случае способы агрегирования. Если результаты, полученные с помощью (8) - (10), окажутся близкими, то это будет дополнительным свидетельством оптимальности решений. В противном случае имеет смысл внимательнее проанализировать, и, может быть, пересмотреть формулировки частных критериев и значения их рангов.

Для решения сформулированной на основе агрегатов (8) - (10) задачи оптимизации портфеля

$$D_k(\vec{x}) \to \max \ \ (k=1, 2, 3) \quad \text{при условии} \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ ,$$

использовалась модификация хорошо известного метода прямого случайного поиска **[24].**

Была разработана специальная процедура, обеспечивающая выполнение условия $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ для случайно выбранного вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Безусловно, могут быть использованы любые иные современные методы поиска экстремума, например, генетические алгоритмы. Однако в **[25]** на основании многолетних исследований сделан вывод "…когда оптимизируемая функция нелинейна, недифференцируема и не гладка, метод прямого случайного поиска является единственным выбором".

В качестве решения задачи находили оптимальный вектор $\vec{x_o} = (x_{o1}, x_{o2}, ..., x_{on})$, подставляя который в выражение $\widetilde{R} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{r}_i x_{oi}$, рассчитывали оптимальный нечеткий доход портфеля.

3.2. Численный пример

Чтобы сравнить предложенный метод с известными подходами, основанными на «нечетком улучшении» модели Марковица, использовался пример оптимизации пятикомпонентного нечеткого портфеля, заимствованный из ставшей уже канонической работы **[15]**, который можно использовать как тест. В **[15]** доходности компонент представлены «нормальными» нечеткими числами (Рис. 2). Поэтому для их представления с помощью соответствующих α-уровней использовалась специальная процедура, описанная в **[20].**

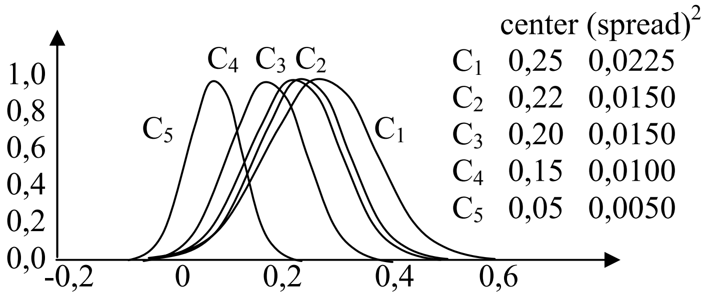

Рис. 2. «Нормальные» нечеткие доходности компонент портфеля [6]

Результаты, полученные для разных рангов критериев максимизации дохода β и минимизации риска γ, представлены в таблицах 1-3. Для простоты мы приводит только трапецеидальные аппроксимации полученных оптимальных нечетких портфельных доходов.

Табл. 1. Результаты оптимизации с использованием агрегирования Р. Егера (8)

No	β	γ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Оптимальный нечеткий доход портфеля	Среднее значение
1	2	0	1	0	0	0	0	**[0,03 , 0,21 , 0,29 , 0,47]**	**0,250**
2	1,9	0,1	0,97	0,03	0	0	0	[0,03 , 0,21 , 0,29 , 0,47]	0,249
3	1,5	0,5	0,86	0,14	0	0	0	**[0,03 , 0,21, 0,28 , 0,46]**	**0,246**
4	1,0	1,0	0,68	0,32	0	0	0	**[0,03 , 0,21 , 0,27 , 0,45]**	**0,241**
5	0,7	1,3	0,54	0,46	0	0	0	**[0,04, 0,20 , 0,27 , 0,44]**	**0,237**
6	0,4	1,6	0,36	0,64	0	0	0	**[0,04 , 0,20 , 0,26 , 0,42]**	**0,231**
7	0,2	1,8	0,2	0,8	0	0	0	**[0,04 , 0,20, 0,26 , 0,41]**	**0,226**
8	0	2	0	1	0	0	0	**[0,04 , 0,19 , 0,25 , 0,40]**	**0,220**

Табл. 2. Результаты оптимизации с использованием мультипликативного агрегирования (9)

No	β	γ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Оптимальный нечеткий доход портфеля	Среднее значение
1	2	0	1	0	0	0	0	**[0,03 , 0,21 , 0,29 , 0,47]**	**0,25**
2	0,8	1,2	1	0	0	0	0	[0,03 , 0,21 , 0,29 , 0,47]	0,25
3	0,65	1,35	0,75	0,25	0	0	0	**[0,03 , 0,21 , 0,28 , 0,45]**	**0,24**
4	0,6	1,4	0,42	0,58	0	0	0	**[0,04 , 0,20 , 0,26 , 0,43]**	**0,23**
5	0,55	0,45	0,1	0,9	0	0	0	**[0,04 , 0,19 , 0,25 , 0,40]**	**0,22**
6	0,5	1,5	0	1	0	0	0	[0,04 , 0,19 , 0,25 , 0,40]	0,22
7	0	2	0	1	0	0	0	[0,04 , 0,19 , 0,25 , 0,40]	0,22

Табл. 3. Результаты оптимизации с использованием агрегирования (10)

No	β	γ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Оптимальный нечеткий доход портфеля	Среднее значение
1	2	0	1	0	0	0	0	**[0,03, 0,21 , 0,29 , 0,47]**	**0,25**
2	1,7	0,3	1	0	0	0	0	[0,03, 0,21 , 0,29 , 0,47]	0,25
3	1	1	1	0	0	0	0	[0,03, 0,21 , 0,29 , 0,47]	0,25
4	0,6	1,1	0	1	0	0	0	**[0,04 , 0,19 , 0,25 , 0,40**	**0,22**
5	0,5	1,5	0	1	0	0	0	[0,04 , 0,19 , 0,25 , 0,40]	0,22
6	0	2	0	1	0	0	0	[0,04 , 0,19 , 0,25 , 0,40]	0,22

Можно заметить, что результаты, полученные с использованием агрегации (10) (взвешенная сумма), скорее тривиальны и мало чувствительны к изменениям рангов β и γ, что полностью соответствует теоретическим выводам **[20,21].** Таким образом, более предпочтительно использовать свертки (8) и (9). На рис. 3 представлены трапецеидальные оптимальные нечеткие доходы, полученные с помощью мультипликативной агрегации (9) для разных рангов β и γ (нумерация на рис. 3 соответствует нумерации в таблице 2). Видно, что, несмотря на существенные отличия в соотношениях рангов β и γ, полученные оптимальные доходы вполне сопоставимы. Результаты оптимизации, представленные в таблицах 1-3, вполне соответствуют здравому смыслу: с ростом ранга критерия минимизации риска по отношению к критерию максимизации дохода, доля «рискованных» компонент в оптимальном портфеле снижается.

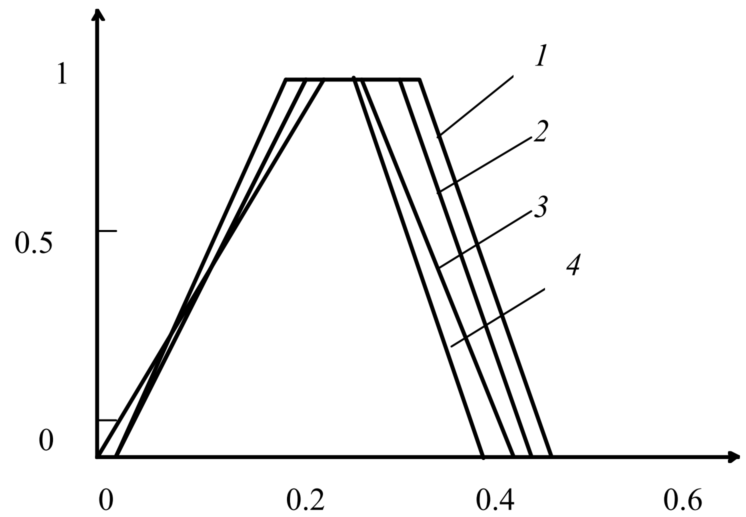

Рис. 3. Нечеткие доходы оптимальных портфелей, полученные с использованием мультипликативного агрегирования (9)

На рис. 4 представлены результаты, полученные в **[15]** с использованием наиболее известных современных методов нечеткой портфельной оптимизации применительно к описанному примеру пятикомпонентного нечеткого портфеля. Отметим, что эти методы являются однокритериальными по построению.

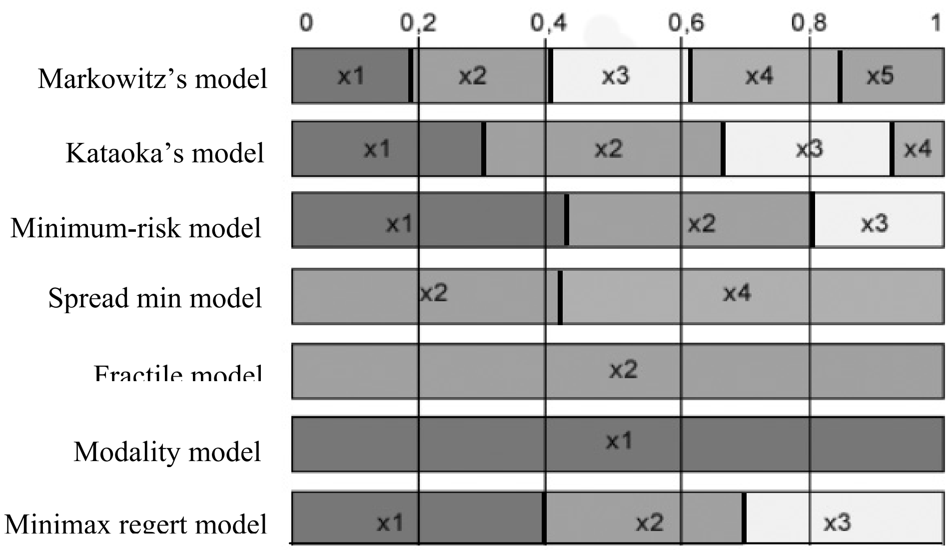

Рис. 4. Оптимальные портфели, полученные в [15] с использованием различных методов оптимизации нечеткого портфеля

Нетрудно заметить, что эти методы позволяют получить более диверсифицированные оптимальные портфели, чем предложенный нами двухкритериальный метод, основанный на новом подходе к учету риска. Однако в рассматриваемом случае такая диверсификация представляется некорректной, поскольку не соответствует реальным преференциям разумного инвестора.

Большинство рассмотренных в **[15]** методов включают в оптимальный портфель компоненту C_3 (см. рис. 4), в то время как она должна быть полностью исключена. Действительно, компоненты C_3 и C_2 имеют идентичные среднеквадратические отклонения и практически одинаковые левые границы нечеткой доходности (рис. 2) .

Иными словами, эти компоненты в равной степени рискованны. При этом в среднем компонента C_2 более доходна, чем C_3 (см. рис. 2), поэтому каждый разумный инвестор исключит компоненту C_3 из рассмотрения (случай абсолютного доминирования C_2 над C_3). Отметим, что при использовании предложенного нами метода компонента C_3 не входит в оптимальный портфель вне зависимости от метода агрегирования и соотношения рангов β и γ .

Далее, средняя доходность C_1 на 40% выше, чем компоненты C_4, и 5 раз выше, чем средняя доходность C_5. Поэтому разумный инвестор, учитывая, что левые границы нечетких доходов C_1, C_4 , C_5, т.е. их возможные минимальные доходности (фактически риски, как это показано в разделе 2) практически не различаются, исключил бы компоненты C_4, C_5.

Из всего этого следует, что разработанный нами метод не только лучше ранее предложенных, но и может служить основой для построения новой методологии решения задач оптимизации портфеля на базе более реалистичной концепции портфельного риска.

Отметим, что в рамках предложенного подхода не накладывается специальных ограничений на число и характер учитываемых частных критериев, поэтому он может быть легко адаптирован к конкретным рыночным ситуациям, например, если требуется включение критериев ликвидности, транзакционных издержек и пр.

4. Еще ближе к реальности

Практикующему инвестору предшествующие рассуждения могут (и должны) показаться слишком абстрактными. Поэтому постараемся конкретизировать задачу. Раскрепощение сознания вследствие освобождения его от догматов Гарри Марковица вызвало непрерывный поток портфельных идей. Некоторые из них даже практически реализуемы.

4.1. Двухкомпонентный портфель

Предположим, мы торгуем на Бирже на часовых барах, т.е., принимаем торговые решения в конце каждого часа. Положим, что наша стратегия опирается на хеджировании путем управления портфелем из двух компонент (акции двух разных фирм, фьючерсы с разными сроками поставки, две не слишком скоррелированные пары валют на рыке Forex и пр.). В сущности, мы предлагаем портфельную альтернативу хорошо известной стратегии Pair Trading.

В момент (τ_0) закрытия текущего бара нам известны цены закрытия компонент C_1 и C_2. С использованием средств технического анализа с учетом фундаментальных данных мы можем прогнозировать, куда движется рынок, и оценить интервалы возможных цен закрытия (бары) в конце следующего часа (момент τ_1) (Рис.5).

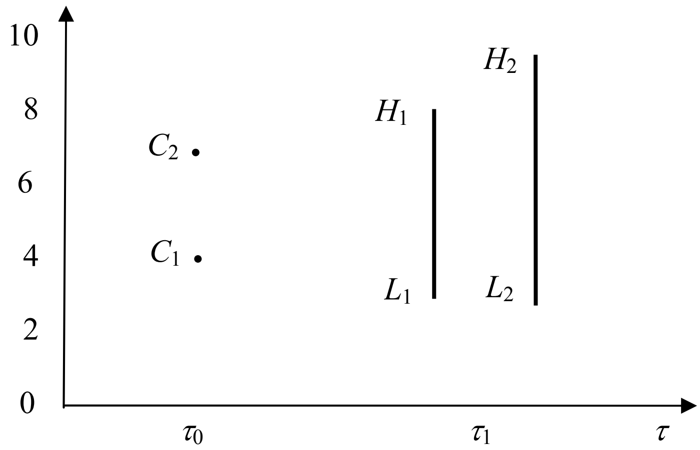

Рис. 5. Интервальное прогнозирование цен акций: *L*- минимальная цена, *H* -максимальная цена, *C*- цена закрытия.

На практике это можно сделать, например, путем экстраполяции максимумов H, и минимумов L, двух-трех последних баров. Пользуясь этой информацией и правилами интервальной арифметики **[20],** можно оценить интервальные доходы (на следующем баре) на одну акцию. В нашем случае (Рис.5) получаем:

$$\Delta P_1 = [\underline{\Delta P}_1, \overline{\Delta P}_1] = [L_1, H_1] - C_1 = [3{,}8] - [4{,}4] = [-1{,}4],$$
$$\Delta P_2 = [\underline{\Delta P}_2, \overline{\Delta P}_2] = [L_2, H_2] - C_2 = [3{,}9] - [7{,}7] = [-4{,}2].$$

Нетрудно заметить, что значения $\underline{\Delta P}$ - это возможные потери на одну акцию в случае наиболее неудачного стечения обстоятельств, в то время как $\overline{\Delta P}$ - максимальные доходы, если очень повезет в торговле. Очевидно, что максимальные возможные доходы компоненты 1 превышают максимальные возможные потери. Для компоненты 2 все наоборот. Поэтому вполне разумным, на первый взгляд, представляется продать все имеющиеся акции компоненты 2 и купить на вырученные деньги акции компоненты 1 (сколько удастся). Однако не будем спешить. Продавать акции компоненты 2 нужно, но не все.

Положим, в момент τ_0 мы уже имели портфель, состоящий из x_{01} акций компоненты 1 и x_{02} акций компоненты 2. Кроме того, для простоты будем придерживаться политики торговли только средствами портфеля: покупать акции будем только из средств их продажи.

Положим, что мы намерены продать Δx акций портфеля компоненты 2. Тогда с учетом нашей политики money management интервальный доход портфеля в момент τ_1 можно представить как

$$\Delta P = x_{11}\Delta P_1 + x_{12}\Delta P_2 = (x_{01} + \Delta x \frac{C_2}{C_1})\Delta P_1 + (x_{02} - \Delta x)\Delta P_2 \ .$$

После несложных преобразований с использованием правил интервальной арифметики, получаем:

$$\Delta P = [\underline{\Delta P}, \overline{\Delta P}] = [\underline{a} + \underline{b}\Delta x, \overline{a} + \overline{b}\Delta x] \ ,$$

где $\underline{a} = x_{01}\underline{\Delta P}_1 + x_{02}\underline{\Delta P}_2$, $\bar{a} = x_{01}\overline{\Delta P}_1 + x_{02}\overline{\Delta P}_2$, $\underline{b} = \frac{C_2}{C_1}\underline{\Delta P}_1 - \overline{\Delta P}_2$, $\bar{b} = \frac{C_2}{C_1}\overline{\Delta P}_1 - \underline{\Delta P}_2$.

Таким образом, возможные максимальные потери портфеля $\underline{\Delta P}(\Delta x)$ и возможные максимальные доходы $\overline{\Delta P}(\Delta x)$ являются функциями Δx. Что же дальше? Простое на первый взгляд решение: найти на интервале допустимых значений $0 \le \Delta x \le x_{02}$ такое Δx_{opt}, которое бы максимизировало сумму $\underline{\Delta P} + \overline{\Delta P}$, встречает ряд возражений. На практике всегда существуют ограничения уровня допустимых потерь, например, выражаемые как в конкретных суммах, так и в процентах от депозита (условия margin call и т.д.), которые необходимо учитывать. Кроме того, хорошо известно, что печаль расставания с деньгами глубже радости их получения. Это обстоятельство является предметом серьезных научных исследований в рамках «когнитивной психологии». Свежий обзор по этой теме и последние результаты в разрезе долгосрочных портфельных инвестиций можно найти в **[26].**

Однако, учитывая, что желания снизить потери (риск) и максимизировать доходы на практике одновременно невыполнимы, будем, как и в предыдущих разделах, придерживаться многокритериального подхода.

Сформулируем частный критерий минимизации потерь. В духе теории нечетких множеств будем описывать его функцией принадлежности $\mu_R(\underline{\Delta P})$ значений $\underline{\Delta P}(\Delta x)$ области допустимых потерь. Критерий принимает максимальные значения, равные единице, в области принимаемых неизбежных потерь $0 \le \underline{\Delta P} \le \Delta P_n$ (пусть, например, ΔP_n - транзакционные издержки) и снижается до нуля при возрастании $\underline{\Delta P}(\Delta x)$ до уровня недопустимых потерь ΔP_{max} (Рис.6а).

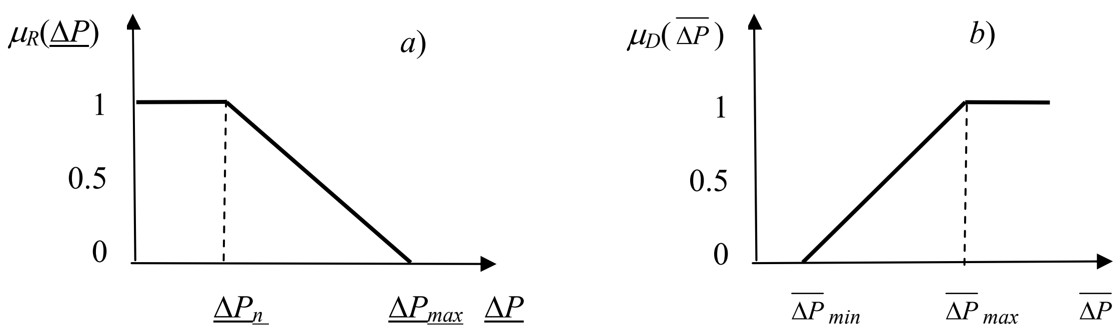

Рис. 6. Частные критерии минимизации потерь и максимизации доходов.

Мы совершенно не настаиваем на интерпретации критериев, представленных на рис. 6, исключительно в духе теории нечетких множеств: в данном случае ничем не хуже их интерпретация как функций полезности или функций желательности Харрингтона. Аналогично определяем критерий доходов $\mu_D(\overline{\Delta P})$ (Рис. 6b). При этом $\overline{\Delta P}_{min}$ - минимальный доход, ради которого стоит затевать всю эту суету с пересмотром портфеля. Несколько сложнее с $\overline{\Delta P}_{max}$. Определим эту величину как максимальный доход, который мы получили в следующей транзакции: продажа всех акций компоненты 2 и покупка на все вырученные деньги акций компоненты 1, т.е., $\overline{\Delta P}_{max} = \frac{x_{02}C_2}{C_1}\overline{\Delta P}_1$.

Обобщенный критерий можно построить, например, используя агрегирование Егера (см. п.п. 3.1) $D_1(\Delta x) = min(\mu_R^{\beta}(\underline{\Delta P}(\Delta x)), \mu_D^{\gamma}(\overline{\Delta P}(\Delta x)))$, после чего задача решается следующим образом:

$$\Delta x_{opt} = arg\,max(D_1(\Delta x)) \text{ при условии } 0 \le \Delta x \le x_{02}.$$

Несмотря на нелинейность и недифференцируемость функции $D_1(\Delta x)$, численное решение сложностей не вызывает. Интересно, что слово Риск нам вообще не понадобилось, поскольку он неявно определен ожидаемыми потерями. Введение понятия Риск не прибавило бы ничего, кроме дополнительной путаницы.

Предложенная модель легко расширяется на случай произвольного числа компонент.

4.1. Многокомпонентный портфель

Пусть имеется N компонент, каждая из которых характеризуется собственным интервальным доходом на одну акцию: $\Delta P_i = [\underline{\Delta P}_i, \overline{\Delta P}_i]$

Обозначим компоненты, для которых выполняется $\overline{\Delta P}_i > abs(\underline{\Delta P}_i)$ знаком «+». Пусть имеется n таких компонент и известны ΔP_i^+, $\{C_{i0}\}$, $\{x_{i0}^+\}, i = 1,...,n$. Очевидно, для оставшихся m=N-n компонент, которые мы обозначим знаком «-» выполняется $abs(\underline{\Delta P}_j) > \overline{\Delta P}_j$ и известны ΔP_j^-, $\{C_{j0}\}$, $\{x_{j0}^-\}$, $j = 1,...,m$.

Ясно, что акции «-»-компонент будем продавать и на вырученные деньги будем приобретать акции «+»-компонент.

Интервальный портфельный доход можно представить в виде

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n}(x_{i0}^+ + \Delta x_i^+)\Delta P_i^+ + \sum_{j=1}^{m}(x_{j0}^- + \Delta x_j^-)\Delta P_j^-.$$

После несложных преобразований с использованием правил интервальной арифметики получаем:

$$\Delta P = [\underline{\Delta P}(\{\Delta x_i^+\},\{\Delta x_j^-\}), \overline{\Delta P}(\{\Delta x_i^+\},\{\Delta x_j^-\})],$$

где

$$\underline{\Delta P}(\{\Delta x_i^+\},\{\Delta x_j^-\}) = \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^+\underline{\Delta P}_i^+ + \sum_{j=1}^{m}x_j^-\underline{\Delta P}_j^-,$$

$$\overline{\Delta P}(\{\Delta x_i^+\},\{\Delta x_j^-\}) = \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^+\overline{\Delta P}_i^+ + \sum_{j=1}^{m}\Delta x_j^-\overline{\Delta P}_j^-$$

Ограничения на продажи акций «-»-компонент очевидны: $0 \le \Delta x_j^- \le x_{jo}^-$, $j = 1,...,m$.

Для каждого вектора $\{\Delta x_j^-\}$ удовлетворяющего этим ограничениям получаем сумму $S_s = \sum_{j=1}^{m}\Delta x_j^- C_{j0}$, которую можем потратить на приобретение акций «-»-компонент.

Поэтому верхнее ограничение на вектор $\{\Delta x_i^+\}$ представлено неявно неравенством $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^+ C_{i0} \le S_s$, нижнее очевидно: $0 \le \Delta x_i^+, i = 1,...,n$. Частные критерии минимизации потерь $\mu_R(\underline{\Delta P})$ и максимизации доходов $\mu_D(\overline{\Delta P})$ имеют такой вид, как и для рассмотренного выше двухкомпонентного портфеля (Рис.6).

Единственная особенность: определение $\overline{\Delta P}_{max} = \frac{x_{j\,min} C_{j\,min}}{x_{i\,max}} \Delta P_{i\,max}$, где индекс «$j\,min$» соответствует компоненте с минимальными возможными значениями $\underline{\Delta P}^-_{j\,min} = min(\underline{\Delta P}^-_j)$, индекс «$j\,max$» соответствует компоненте с максимальными возможными доходами $\overline{\Delta P}^+_{i\,max} = max(\underline{\Delta P}^+_i)$.

В итоге задача формулируется следующим образом:

$$(\{\Delta x_i^+\},\{\Delta x_j^-\})_{opt} = arg\,max(D_1(\{\Delta x_i^+\},\{\Delta x_j^-\})$$

при условиях $0 \le \Delta x_j^- \le x_{jo}^-$, $j = 1,...,m$; $0 \le \Delta x_i^+, i = 1,...,n$; $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^+ C_{i0} \le \sum_{j=1}^{m}\Delta x_j^- C_{j0}$.

Численное решение задачи с использованием, например, модификаций метода прямого случайного поиска не представляет существенных трудностей.

В случае среднесрочных и долгосрочных инвестиций кроме интервала прогнозируемых цен в потоке финансовой информации можно найти также так называемые цены консенсуса. Обычно это цена, находящаяся в центре диапазона цен, предсказываемых большинством (обычно 70-80%) финансовых экспертов. Эксперты в своих прогнозах опираются не только, а скорее, не столько, на статистические данные, сколько на оценку макро и микроэкономических и политических событий, слухи и даже инсайдерскую информацию. Поэтому в таком случае нам придется иметь дело уже не интервалами а с нечеткими треугольными числами, представляющими будущие цены. Техника решения задач оптимизации в такой постановке несколько усложняется, однако разработанные нами численные методы **[20, 26-28]** и опыт их применения в различных областях **[29-33]** позволяют судить, что задача проблема вполне разрешима.

Заключение

Безусловно, предложенные в статье (разделы 3 и 4) теоретические схемы могут служить только скелетом для построения реальных торговых систем, которые, например, в случае краткосрочных инвестиций, требуют включения средств управления капиталом (Stop Loss, Margin Call и пр.), условий торговли на конкретной площадке и платформе, предоставляемой брокерской компанией. Экзотических вариантов –множество. Например, клиент может предпочесть портфель из акций РАО ЕЭС, бонов казначейства США, фьючерсов на индексы Варшавской биржи и все это он желает подпереть срочными контрактами на поставку мяса страусов из Австралии в Японию. Известно «чтобы костюмчик сидел, нужно общаться с клиентом». Всего не предусмотришь.

Однако целью статьи было показать, что полный отказ от методологии *a la* Марковиц (именно отказ, а не нечеткое или какое-либо другое улучшение), позволяет сформулировать задачу оптимизации портфеля не только намного проще, но и намного ближе реальности.

Список цитируемых источников

1. Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, New York: Wiley, 1959.
2. Markowitz H.M. Portfolio Selection // Journal of Finance, № 7, 1952, с. 7-91.
3. Sharpe W.F. A simplified model for portfolio analysis // Management Science, 1963, с. 277-293.
4. Longerstaey J., Spenser M. RiskMetric-Technical document, New York: RiskMetric Group, J.P. Morgan, 1996.
5. Konno H., Yamazaki H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokio stock market // Management Science, № 37, 1991, с. 519-531.
6. Linsmeier T. J., Pearson N. D. Risk measurement: an introduction to value at risk, Champaign, IL: University of Illinois, 1996.
7. Недосекин А.О. Новый подход к оптимизации фондового портфеля в нечеткой постановке задачи. – На сайте: http://sedok.narod.ru/s_files/2003/Art_100703.doc
8. Рассел Б. Человеческое познание. Его сфера и границы, Киев: Ника-Центр, 1997.
9. Хейне П. Экономический способ мышления, М.: Новости, 1991.
10. Zmeškal Z. Value at risk methodology of international index portfolio under soft conditions (fuzzy-stochastic approach) // International Review of Financial Analysis, № 14, 2005, с. 263– 275.
11. Kuo R.J., Chen C.H., Hwang Y.C. An intelligent stock trading decision support system through integration of genetic algorithm based fuzzy neural network and artificial neural network // Fuzzy Sets and Systems, № 118, 2001, с. 21-45.
12. Watada J. Fuzzy portfolio selection and its applications to decision making // Tatra Mountains Mathematical Publication, № 13, 1997, с. 219–248.
13. Ortí F.J., José Sáez J., Terceño A. On the treatment of uncertainty in portfolio selection // Fuzzy Economic Review, № 8, 2002, с. 22-31.
14. Tanaka H., Guo P. Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions // European Journal of Operational Research, № 114, 1999, с. 115–126.
15. Inuiguchi M., Ramik J. Possibilistic linear programming: A brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem // Fuzzy Sets and Systems, № 111, 2000, с. 3–28.
16. Jończyk M., Sewastianow P. Bicriterial fuzzy portfolio selection // Operations research and decisions, № 4, 2003, с. 149-165.
17. Jończyk M., Sewastianow P. Comparative study of aggregation methods in bicriterial fuzzy portfolio selection. Proceedings of Int. Conf. on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance, St. Petersburg, Russia, 2004, p. 584-592.
18. Dymova L, Sewastjanow P. A new approach to risk assessment in fuzzy portfolio selection. Proceedings of Conf. Modelling of Preferences and Risk, Usron, Poland, 2005 (in press
19. Nedosekin. A., Korchunov V. A new approach to optimizing portfolio funding in an fuzzy environment. Proceedings of Int. Conf. on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance, St Petersburg, Russia, 2004, p. 474-483.

20. Дилигенский Н.В.,Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология, М.: Машиностроение – 1, 2004. http://sedok.narod.ru/my_news.html
21. Dimova L., Sevastianov P., Sevastianov D. MCDM in a fuzzy setting: investment projects assessment application // International Journal of Production Economics (in press).
22. Вилкас Э.Й., Майминас Е.З. Решения: теория, информация, моделирование, М.: Радио и связь, 1981.
23. Yager R. Multiple objective decision-making using fuzzy sets // International Journal of Man-Machine Studies № 9, 1979, c. 375 –382.
24. Törn A., Žilinskas A. Global optimization, Berlin: Springer,1989.
25. Ali M.M., Törn A. Population of set-based global algorithms: some modifications and numerical studies // Computers& Operations Research, № 31, 2004, c. 1703-1725.
26. Sevastianov P., Rog. P. A probabilistic approach to fuzzy and interval ordering // Task Quarterly. Special Issue Artificial and Computational Intelligence, № 7, 2002, c. 147-156.
27. Sewastianow P., Róg P., Venberg A. A Constructive Numerical Method for the Comparison of Intervals. Proceedings of 4th International Conference: Parallel Processing and Applied Mathematics, Naleczow, Poland, 2001, p. 756-761.
28. Sewastianow P., Róg P. Two-objective method for crisp and fuzzy interval comparison in optimization // Computers and Operation Research (to appear).
29. Севастьянов П.В., Туманов Н.В. Многокритериальная идентификация и оптимизация технологических процессов, Минск: Наука и техника, 1990.
30. Севастьянов П.В., Дымова Л.Г., Каптур М., Зенькова А. В. Методика многокритериальной иерархической оценки качества в условиях неопределенности // Информационные технологии, № 9, 2001, с. 84 - 87.
31. Севастьянов П.В., Венберг А.В. Оптимизация технико-экономических параметров работы энергоагрегатов при нечетких исходных данных. // Энергетика. (Известия высших учебных заведений и энерг. объединений СНГ). Минск: БГПА, № 1, 2000, с. 62-70.
32. Севастьянов П.В., Вальковский В.И. Имитационное моделирование технологических процессов в транспортно-сбытовой логистике при нечетких исходных данных // Ресурсы Информация Снабжение Конкуренция, № 2-3, 1999, с. 79 - 83.
33. Sewastianow P., Róg P. Fuzzy modeling of manufacturing and logistic systems // Mathematics and Computers in Simulation, № 63, 2003, c. 569- 585.